



TITLE:

# Wreath積のRobinson-Schensted 対応(量子群とRobinson-Schensted対応)

AUTHOR(S):

岡田, 聡一

---

CITATION:

岡田, 聡一. Wreath積のRobinson-Schensted 対応(量子群とRobinson-Schensted対応). 数理解析研究所講究録 1989, 705: 28-45

ISSUE DATE:

1989-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/101605>

RIGHT:

## Wreath 積の Robinson-Schensted 対応

東大・理 岡田聡一

半順序集合  $P$  中の chain, つまり  $P$  の元の増大列  $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$  の個数を数えることは, 組合せ論だけでなく他の分野でも重要である. 対称群に対する Robinson-Schensted 対応を用いることによって, 分割全体が Young 図形の包含関係についてなす半順序集合  $Y$  (Young 束と呼ばれる) 中の chain の個数に関するいくつかの等式に bijective な証明を与えることができる. ここでは, wreath 積に対する Robinson-Schensted 対応を構成し, それを用いて Young 束の直積半順序集合  $Y^k$  中の chain の個数に関する等式に bijective な証明を与える. また, Robinson-Schensted 対応をまったく用いない Stanley による純代数的な証明も紹介する.

### §1. 用語と記号

まず, 半順序集合に関する用語と記号をまとめておく.

$P$  を半順序集合とする.  $x < y$  であり, かつ  $x < z < y$  となる  $z \in P$  が存在しないとき,  $y$  は  $x$  を覆う ( $y$  covers  $x$ ) という.  $x$  を覆う (resp.  $x$  に覆われる)  $P$  の元全体の集合を  $C^+(x)$  (resp.  $C^-(x)$ ) と表わす.  $P$  の元の増大列  $c = (x_0 < x_1 < \cdots < x_n)$  を  $x_0$  から  $x_n$  への chain という. そして, 全ての  $i$  に対して  $x_i$  が  $x_{i-1}$  を覆うとき, chain  $c$  は saturated であるという.

記号.  $P$  を最小元  $\hat{0}$  をもつ半順序集合とする.  $x \in P$  に対して,  $\hat{0}$  から  $x$  への saturated chain 全体の集合を  $C_P(x)$  と表わし, その濃度を  $e_P(x) = \#C_P(x)$  とおく.

半順序集合  $P$  は次の条件を満たす関数  $\rho: P \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  が存在するとき, 次数つき (graded) であるという.

- (a)  $x$  が  $P$  の極小元ならば,  $\rho(x) = 0$ .
- (b)  $y$  が  $x$  を覆うとき,  $\rho(y) = \rho(x) + 1$ .

このとき,  $P_i = \rho^{-1}(i) = \{x \in P : \rho(x) = i\}$  とおく. 応用上重要な半順序集合はほとんど全て, 次数つきである.

記号.  $P$  を次数つき半順序集合で, 最小元  $\hat{0}$  をもつとする. このとき,

$$\begin{aligned} \alpha_P(0 \rightarrow n) &= \sum_{x \in P_n} e_P(x) \\ &= \#\{c = (x_0 < x_1 < \cdots < x_n) : x_i \in P_i\} \end{aligned}$$

とおく.

次に, tableau について簡単にまとめておく. (詳しくは, 寺田氏の項を参照していただきたい) 分割全体の集合を  $\mathcal{P}$  とする.  $\lambda \in \mathcal{P}$  とする.  $\lambda$  の Young 図形の各箱に 1 つずつ自然数を書き込んで, 各行が左から右に単調非減少となり, 各列が上から下に単調増加となるようにしたものを, shape  $\lambda$  の semi-standard tableau という.  $A \subset \mathbb{N}$  ( $\#A = |\lambda|$ ) に対して,  $A$  の元が 1 回ずつ現われる shape  $\lambda$  の semi-standard tableau を,  $A$  上の shape  $\lambda$  の standard tableau という.  $A$  上の shape  $\lambda$  の standard tableau 全体の集合を  $\text{STab}(\lambda; A)$  と表わす.  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  上の standard tableau を

通常は単に standard tableau という. 明らかに,  $\# \text{STab}(\lambda; A)$  は  $\lambda$  と  $\#A$  にしかよらない. さらに, 分割の列  $\emptyset = \lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)} = \lambda$  で, 各  $i$  に対して  $\lambda^{(i)}$  の Young 図形が  $\lambda^{(i-1)}$  の Young 図形に 1 つ箱を付け加えるか, または  $\lambda^{(i-1)}$  の Young 図形から 1 つ箱を取り除くかして得られるようなものの全体のなす集合を  $\text{UDTab}_n(\lambda)$  とする.

semi-standard tableau  $T$  と  $r \in \mathbb{N}$  が与えられたとき,  $T$  に  $r$  を (row) insert して得られる semi-standard tableau を  $T \leftarrow r$  と書く. また,  $A$  上の standard tableau  $T$  に対して,  $T$  の  $(1, 1)$  の位置に穴をあけ sliding algorithm を施して得られる  $A - \{T(1, 1)\}$  上の standard tableau を  $\Delta(T)$  とする.

## §2. Young 束と Robinson-Schensted 対応

まず, 対称群に対する Robinson-Schensted 対応 (以下, R-S 対応と略す)

$$(P, Q): \mathfrak{S}_n \xrightarrow{\sim} \coprod_{\lambda \vdash n} \text{STab}(\lambda; [n]) \times \text{STab}(\lambda; [n])$$

$$w \longmapsto (P(w), Q(w))$$

と Young 束との関係を見ておこう.

分割全体の集合  $\mathcal{P}$  に次のような順序を入れたものを Young 束 (Young's lattice) といい,  $Y$  と表わす:  $\lambda, \mu \in Y$  に対して,

$$\lambda \geq \mu \iff \lambda_i \geq \mu_i \quad (i \geq 1).$$

つまり,  $\lambda$  の Young 図形が  $\mu$  の Young 図形を含むとき,  $\lambda \geq \mu$  である.  $\rho(\lambda) = |\lambda|$  とおくことにより,  $Y$  は次数つき半順序集合となり,

$$Y_n = \{\lambda \in Y : \lambda \text{ は } n \text{ の分割}\}$$

また,  $Y$  は最小元  $\emptyset = (0, 0, \dots)$  を持つ.

$\lambda \in Y_n$  に対して,  $\emptyset$  から  $\lambda$  への saturated chain  $(\emptyset = \lambda^{(0)} < \lambda^{(1)} < \dots < \lambda^{(n)} = \lambda)$  ( $\lambda^{(i)} \in Y_i$ ) は skew diagram  $\lambda^{(i)} - \lambda^{(i-1)}$  の箱に数字  $i$  を書き込んだ shape  $\lambda$  の standard tableau と同一視できる. 例えば

$$(\emptyset < \square < \square \square < \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}) \in C_Y((2, 1)) \leftrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \in \text{STab}((2, 1))$$

と同一視する. よって, R-S 対応は次のように言い換えられる.

**定理 2.1.** 全単射

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_n &\xrightarrow{\sim} \coprod_{\lambda \vdash n} C_Y(\lambda) \times C_Y(\lambda) \\ w &\longmapsto (c_1(w), c_2(w)) \end{aligned}$$

が存在して

$$(1) \quad c_1(w^{-1}) = c_2(w), \quad c_2(w^{-1}) = c_1(w)$$

従って,  $I(\mathfrak{S}_n) = \{x \in \mathfrak{S}_n : x^2 = 1\}$ ,  $i(\mathfrak{S}_n) = \#I(\mathfrak{S}_n)$  とおくと,

**命題 2.2.**

- (a)  $\sum_{\lambda \in Y_n} e_Y(\lambda)^2 = n!$
- (b)  $\sum_{\lambda \in Y_n} e_Y(\lambda) = i(\mathfrak{S}_n)$

証明: (a) は R-S 対応から明らかである. (1) により, R-S 対応を制限すると全単射

$$I(\mathfrak{S}_n) \xrightarrow{\sim} \{(c, c) : c \in C_Y(\lambda), \lambda \in Y_n\}$$

$$w \longmapsto (c_1(w), c_1(w))$$

が引き起こされるので, (b) がわかる.

これから,  $\alpha(0 \rightarrow n) = \sum_{\lambda \vdash n} e_Y(\lambda)$  の母関数は次のようになる.

命題 2.3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_Y(0 \rightarrow n) \frac{z^n}{n!} = \exp \left( z + \frac{1}{2} z^2 \right)$$

証明: 命題 2.2 により,  $\alpha_Y(0 \rightarrow n) = i(\mathfrak{S}_n)$  である.  $x \in \mathfrak{S}_n$  に対して,  $x^2 = 1$  となるためには  $x$  の cycle type が  $(1^k 2^l)$  となることが必要十分である. よって,

$$i(\mathfrak{S}_n) = \sum_{k+2l=n} \frac{n!}{1^k k! 2^l l!}$$

となるから,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} i(\mathfrak{S}_n) \frac{z^n}{n!} &= \sum_{k \geq 0, l \geq 0} \frac{1}{1^k k! 2^l l!} z^{k+2l} \\ &= \left( \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!} \right) \left( \sum_{l \geq 0} \frac{z^{2l}}{2^l l!} \right) \\ &= \exp z \cdot \exp \frac{z^2}{2} \end{aligned}$$

### §3. Young 束の直積と wreath 積

§2 の結果を Young 束の直積に拡張する.

Young 束  $Y$  の  $k$  個の直積半順序集合を  $Y^k$  とする. つまり,  $Y^k$  は集合としては  $\mathcal{P}$  の  $k$  個の直積であり, その順序は

$$(\lambda^1, \dots, \lambda^k) \geq (\mu^1, \dots, \mu^k) \iff \lambda^i \geq \mu^i \quad (i = 1, \dots, k)$$

で与えられる.  $\rho(\lambda^1, \dots, \lambda^k) = |\lambda^1| + \dots + |\lambda^k|$  によって,  $Y^k$  は次数つき半順序集合であり,

$$(Y^k)_n = \{(\lambda^1, \dots, \lambda^k) \in Y^k : |\lambda^1| + \dots + |\lambda^k| = n\}$$

また,  $Y^k$  は最小元  $\hat{0} = (\emptyset, \dots, \emptyset)$  を持つ.  $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^k) \in (Y^k)_n$  に対して,  $\hat{0}$  から  $\lambda$  への saturated chain 全体の集合

$$C_{Y^k}(\lambda) = \{\hat{0} = \lambda^{(0)} < \lambda^{(1)} < \dots < \lambda^{(n)} = \lambda : \lambda^{(i)} \in (Y^k)_i\}$$

の濃度は

$$(2) \quad e_{Y^k}(\lambda) = \#C_{Y^k}(\lambda) = \frac{n!}{|\lambda^1|! \dots |\lambda^k|!} e_Y(\lambda^1) \dots e_Y(\lambda^k)$$

さて,  $\Gamma$  を任意の有限群とする.  $\Gamma$  の対称群  $\mathfrak{S}_n$  による wreath 積とは, 次のように定義される群  $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$  のことである. 集合としては,  $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$  は, 0 または  $\Gamma$  の元を成分とする  $n \times n$  行列  $X = (x_{ij})$  で, 0 でない成分 ( $\Gamma$  の元) が各行各列に 1 つずつ現われるもの全体からなる. そして, その積は普通の行列の積によって定義される.  $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$  の位数は  $(\#\Gamma)^n n!$  である. 例えば,  $\Gamma$  が位数 2 の巡回群のとき  $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$  は  $B_n$  型 Weyl 群である.

今,  $\{\eta_1, \dots, \eta_k\}$  を  $\Gamma$  の複素既約指標の全体とし,  $\eta_i$  の次数を  $d_i$  とおく. このとき,  $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$  の既約表現は  $(Y^k)_n$  の元でパラメトライズされる.  $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^k) \in (Y^k)_n$  に対応する  $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$  の既約指標を  $\chi^\lambda$  とするとその次数は

$$(3) \quad \chi^\lambda(1) = e_{Y^k}(\lambda) \prod_{i=1}^k d_i^{|\lambda^i|}$$

で与えられる. 従って,

命題 3.1.  $\Gamma$  が位数  $r$  の可換群のとき,  $\chi^\lambda(1) = e_{Y^r}(\lambda)$  となるから,

$$\sum_{\lambda \in (Y^r)_n} e_{Y^r}(\lambda)^2 = r^n n!$$

一般に, 有限群  $G$  に対して

$$I(G) = \{x \in G : x^2 = 1\}, \quad i(G) = \#I(G)$$

とおく.

命題 3.2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} i(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n) \frac{z^n}{n!} = \exp \left( i(\Gamma)z + \frac{1}{2}(\#\Gamma)z^2 \right)$$

証明:  $X = (x_{ij}) \in \Gamma \wr \mathfrak{S}_n$  が  $X^2 = 1$  を満たすためには, その 0 でない成分  $x_{ij} \in \Gamma$  が全て  $x_{ij}x_{ji} = 1$  を満たせばよい. 従って,

$$i(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n) = \sum_{k+2l=n} \frac{n!}{1^k k! 2^l l!} i(\Gamma)^k (\#\Gamma)^l$$



となるから、命題 2.3 の証明と同様にして  $i(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n)$  の母関数が計算できる。

注意. より一般に,  $i_k(G) = \#\{x \in G : x^k = 1\}$  とおくと

$$\sum_{n=0}^{\infty} i_k(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n) \frac{z^n}{n!} = \prod_{d|k} \exp \left( \frac{(\#\Gamma)^{d-1} i_{k/d}(\Gamma)}{d} z^d \right)$$

一方,  $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^k) \in (Y^k)_n$  のとき, (2) と命題 2.3 から

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{\lambda \in (Y^r)_n} e_{Y^r}(\lambda) \right) = \left( \exp(z + \frac{1}{2}z^2) \right)^r \\ = \exp \left( rz + \frac{1}{2}rz^2 \right)$$

となる. これを命題 3.2 と比較すると,

命題 3.3.  $\Gamma$  が位数 2 の巡回群の直積で,  $\Gamma$  の位数が  $r$  であるとき

$$\sum_{\lambda \in (Y^r)_n} e_{Y^r}(\lambda) = i(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n)$$

命題 3.1 と命題 3.2 は Young 束だけに関する主張であり, 対称群 (R-S 対応) を用いなくて直接これらを証明することもできる. これについては, §5 で述べる. 次節では, wreath 積  $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$  に対する R-S 対応を構成し, それを用いて命題 3.1, 命題 3.3 を示す.

また、有限群  $G$  の複素既約指標の次数の総和を  $d(G)$  とすると、(3) と命題 2.3 より、

$$\sum_{n \geq 0} d(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n) \frac{z^n}{n!} = \exp \left( d(\Gamma)z + \frac{1}{2}(\#\Gamma)z^2 \right)$$

これを (4) と比べると、

命題 3.4.  $\Gamma$  が位数  $r$  の可換群のとき、

$$\sum_{\lambda \in (Y^r)_n} e_{Y^r}(\lambda) = d(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n)$$

この命題は、次の事実からもわかる.  $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^k)$  に対応する  $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$  の既約指標  $\chi^\lambda$  を部分群  $\Gamma \wr \mathfrak{S}_{n-1} = \{X = (x_{ij}) : x_{nn} = 1\}$  に制限すると

$$(5) \quad \chi^\lambda \downarrow_{\Gamma \wr \mathfrak{S}_{n-1}} = \sum_{i=1}^k d_i \sum_{\lambda^i \text{ は } \mu^i \text{ を覆う}} \chi^{(\lambda^1, \dots, \mu^i, \dots, \lambda^k)}$$

のように分解する.

#### §4. wreath 積の Robinson-Schensted 対応

有限群  $\Gamma$  を固定し、 $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$  に対する R-S 対応を構成する. そのために、R-S 対応の行き先として

$$\mathcal{T}_{\Gamma, n} = \coprod_{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \lambda} \prod_{\gamma \in \Gamma} \text{STab}(\lambda(\gamma); \mathbf{B}(\gamma)) \times \text{STab}(\lambda(\gamma); \mathbf{A}(\gamma))$$

とおく. ただし,  $A, B, \lambda$  は次を満たす写像  $A: \Gamma \rightarrow 2^{[n]}$ ,  $B: \Gamma \rightarrow 2^{[n]}$  ( $2^{[n]}$  は  $[n]$  の部分集合全体のなす集合を表わす),  $\lambda: \Gamma \rightarrow Y$  全体を走る.

$$\coprod_{\gamma \in \Gamma} A(\gamma) = \coprod_{\gamma \in \Gamma} B(\gamma) = [n] \quad (\text{disjoint union}),$$

$$\#A(\gamma) = \#B(\gamma) = |\lambda(\gamma)| \quad (\gamma \in \Gamma).$$

そして,  $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$  から  $\mathcal{T}_{\Gamma, n}$  への対応を次のように構成する.  $X = (x_{ij}) \in \Gamma \wr \mathfrak{S}_n$  とする.  $\gamma \in \Gamma$  に対して,  $X$  の成分のうち  $\gamma$  に等しいものを 1 で, そうでないものを 0 で置き換えてえられる  $(0, 1)$ -行列を  $X_\gamma$  と表す. そして, 行列  $X_\gamma$  に Knuth 対応を施して得られる semi-standard tableau の対を  $(P_\gamma(X), Q_\gamma(X))$  とする. つまり,  $X_\gamma$  の 0 でない成分が  $p_i$  行,  $q_i$  列 ( $1 \leq i \leq k$ ) にあるとし,  $q_1 < q_2 < \cdots < q_k$  とするとき,

$$P_\gamma(X) = \emptyset \leftarrow p_1 \leftarrow p_2 \leftarrow \cdots \leftarrow p_k$$

であり,  $Q_\gamma(X)$  は tableau  $\emptyset \leftarrow p_0 \leftarrow \cdots \leftarrow p_{i-1}$  に  $p_i$  を insert したときに増えた箱に数字  $q_i$  を書き込んで得られる tableau である. このとき,  $(P_\gamma(X), Q_\gamma(X))_{\gamma \in \Gamma} \in \mathcal{T}_{\Gamma, n}$  となる.

例.  $\Gamma$  として, 位数 3 の巡回群  $Z_3 = \{1, \omega, \omega^2\}$  ( $\omega^3 = 1$ ) をとり,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in Z_3 \wr \mathfrak{S}_7$$

を考える. すると,  $X_\gamma$  は次のようになる. (ただし, 0 でない成分のある行と列のみを取り出して表している.)

$$X_1 = \begin{matrix} & 4 & 7 \\ 2 & \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \\ 6 & \end{matrix}, \quad X_\omega = \begin{matrix} & 2 & 3 & 6 \\ 1 & \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix} \\ 4 & \\ 5 & \end{matrix}, \quad X_{\omega^2} = \begin{matrix} & 1 & 5 \\ 3 & \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \\ 7 & \end{matrix}$$

これらの行列に, Knuth 対応を施すと

$$(P_1(X), Q_1(X)) = (\begin{bmatrix} 2 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 7 \end{bmatrix})$$

$$(P_\omega(X), Q_\omega(X)) = (\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & \end{bmatrix})$$

$$(P_{\omega^2}(X), Q_{\omega^2}(X)) = (\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix})$$

定理 4.1. 上のようにして作った対応

$$\Gamma \wr \mathfrak{S}_n \longrightarrow T_{\Gamma, n}$$

$$X \longmapsto (P_\gamma(X), Q_\gamma(X))_{\gamma \in \Gamma}$$

は全単射であり, 次の性質を持つ.

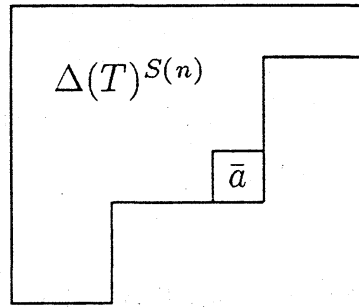
$$(a) \quad P_\gamma(X^{-1}) = Q_{\gamma^{-1}}(X), \quad Q_\gamma(X^{-1}) = P_{\gamma^{-1}}(X)$$

$X_0 = (\delta_{i, n+1-j}) \in \Gamma \wr \mathfrak{S}_n$  とすると

$$(b) \quad P_\gamma(X_0 X) = {}^t P_\gamma(X)^{S(n)}, \quad Q_\gamma(X_0 X) = {}^t Q_\gamma(X)$$

$$(c) \quad P_\gamma(X X_0) = {}^t P_\gamma(X), \quad Q_\gamma(X X_0) = {}^t Q_\gamma(X)^{S(n)}$$

ここで,  $T \in \text{STab}(\lambda; A)$  ( $A \subset [n]$ ) に対して,  $T^{S(n)} \in \text{STab}(\lambda; \bar{A})$  ( $\bar{A} = \{n+1-a : a \in A\}$ ) は次のように帰納的に定義される tableau である:



ただし,  $\bar{a}$  は  $\bar{A}$  の最大元である.

ここで,  $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^k) \in (Y^k)_n$  に対して, 明らかな全単射

$$C_{Y^k}(\lambda) \longrightarrow \coprod_{(A_1, \dots, A_k)} \text{STab}(\lambda^1; A_1) \times \cdots \times \text{STab}(\lambda^k; A_k)$$

$((A_1, \dots, A_k)$  は  $\coprod_{i=1}^k A_i = [n]$  となる  $[n]$  の部分集合の列全体を走る) が存在する. 例えば,  $k=2$  のとき,

$$(\emptyset, \emptyset) < (\square, \emptyset) < (\square, \square) < (\square, \square \square) < \left( \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}, \square \square \right) \\ \longleftrightarrow \left( \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} \right)$$

のように対応している.

系 4.2.  $\Gamma$  の位数が  $r$  のとき, 定理 4.1 の対応は全単射

$$\Gamma \wr \mathfrak{S}_n \xrightarrow{\sim} \coprod_{\lambda \in (Y^r)_n} C_{Y^r}(\lambda) \times C_{Y^r}(\lambda) \\ X \longmapsto (c_1(X), c_2(X))$$

を引き起こす. よって,

$$\sum_{\lambda \in (Y^r)_n} e_{Y^r}(\lambda)^2 = r^n n!$$

系 4.3.  $\Gamma$  が位数 2 の巡回群の直積で, その位数が  $r$  であるとき, 系 4.2 の全単射は

$$c_1(X^{-1}) = c_2(X), \quad c_2(X^{-1}) = c_1(X)$$

を満たすから, 全単射

$$I(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n) \xrightarrow{\sim} \coprod_{\lambda \in (Y^r)_n} C_{Y^r}(\lambda)$$

が引き起こされる。よって、

$$\sum_{\lambda \in (Y^r)_n} e_{Y^r}(\lambda) = i(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n)$$

## §5. $r$ -differential poset

命題 3.1, 3.2 は Young 束の直積だけでなくより一般に  $r$ -differential poset (poset とは partially ordered set の略である) に対して成り立つ。

定義.  $r \in \mathbb{N}$  とする. 次の条件 (D1), (D2), (D3) を満たす半順序集合を  $r$ -differential poset という。

- (D1)  $P$  は最小元  $\hat{0}$  を持つ次数つき半順序集合であり, 任意の  $x < y$  に対して,  $\{z \in P : x \leq z \leq y\}$  は有限集合である.
- (D2)  $x \neq y$  のとき,  $\#(C^+(x) \cap C^+(y)) = \#(C^-(x) \cap C^-(y))$ .
- (D3)  $x \in P$  のとき,  $\#C^+(x) = \#C^-(x) + r$ .

命題 5.1. Young 束の直積  $Y^r$  は  $r$ -differential poset である。

証明: 定義から,  $P$  が  $r$ -differential poset,  $Q$  が  $s$ -differential poset ならば, その直積  $P \times Q$  は  $(r+s)$ -differential poset となる。よって,  $Y$  が 1-differential poset であることを示せばよいが, 定義の条件 (D1), (D2) は Young 束については明らかである。条件 (D3) については,  $\lambda \in Y$  に対して,  $C^+(\lambda)$  (resp.  $C^-(\lambda)$ ) が  $\lambda$  の Young 図形の隅 (resp. 角) の個数に等しいことからわかる。

定理 5.2. ([St2, Prop.3.1, Cor.3.9])  $P$  が  $r$ -differential poset ならば

$$(6) \quad \sum_{x \in P_n} e_P(x)^2 = r^n n!$$

$$(7) \quad \sum_{n \geq 0} \alpha_P(0 \rightarrow n) \frac{t^n}{n!} = \exp \left( rt + \frac{1}{2} rt^2 \right)$$

が成り立つ.

この定理を証明するために以下の記号を導入する.  $P$  を  $r$ -differential poset とする.  $t$  に関する複素数体  $\mathbb{C}$  上の 1 変数べき級数体を  $K$  とし,  $P$  の元の体  $K$  上の (無限) 線型結合全体のなす  $K$  線型空間を  $\hat{K}P$  とする. 線型変換  $U, D : \hat{K}P \rightarrow \hat{K}P$  を

$$Ux = \sum_{y \in C^+(x)} y, \quad Dx = \sum_{y \in C^-(x)} y$$

によって定義し,  $P = \sum_{x \in P} x \in \hat{K}P$  とおく. すると,  $r$ -differential poset の定義から

$$(8) \quad DU - UD = r \cdot \text{Id}$$

$$(9) \quad DP = (U + r)P$$

注意.  $P$  が最小元  $\hat{0}$  をもつ順序つき半順序集合で, 各  $n$  に対して  $P_n$  が有限集合であるとする. このとき,  $P$  が  $r$ -differential poset であることと (8) が成り立つことは同値である.



定理 5.2 の証明: まず,  $\sum_{x \in P_n} e_P(x)^2$  は  $D^n U^n \hat{0}$  における  $\hat{0}$  の係数に等しい. ところが, (8) と  $D\hat{0} = 0$  を繰り返し用いると,

$$D^n U^n \hat{0} = r^n n! \hat{0}$$

従って,  $\sum_{x \in P_n} e_P(x)^2 = r^n n!$ . 次に, (7) を示すために,

$$(10) \quad e^{Dt} \mathbf{P} = e^{rt + rt^2/2 + Ut} \mathbf{P}$$

に注意する. 実際, (10) の左辺は

$$DH(t)\mathbf{P} = \frac{\partial H}{\partial t}(t)\mathbf{P}, \quad H(0)\mathbf{P} = \mathbf{P}$$

で特徴づけられ, (8), (9) を用いると (10) の右辺もこれを満たすことが分かる. さて,  $\alpha_P(0 \rightarrow n)$  は  $D^n \mathbf{P}$  における  $\hat{0}$  の係数に等しいから,  $\sum_{n \geq 0} \alpha_P(0 \rightarrow n) t^n / n!$  は  $e^{Dt} \mathbf{P}$  における  $\hat{0}$  の係数に等しい. ところが,  $k > 0$ ,  $x \in P$  のとき  $U^k x$  には  $\hat{0}$  が現れないから, (10) の右辺における  $\hat{0}$  の係数は  $\exp(rt + \frac{1}{2}rt^2)$  である. これで, (7) が示された.

このように偏微分方程式を解くことによって,  $P$  に関する数え上げ問題を解くことができるので, differential poset という名前がある. 例えば, 次のようなこともわかる.

命題 5.3. ([St, Prop.3.14])  $P$  を  $r$ -differential poset とする.  $x \in P$  と  $n \in \mathbb{N}$  に対して,  $P$  の元の列  $\hat{0} = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x$  で,  $x_i \in C^+(x_{i-1}) \cup C^-(x_{i-1})$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を満たすものの個数を  $\delta_n(x)$  とする. このとき,

$$\sum_{x \in P_n \cup P_{n-2} \cup P_{n-4} \cup \dots} \delta_n(x)^2 = \frac{(2n)! r^n}{2^n n!}$$

$P = Y$  のときこの命題は,

$$\sum_{\lambda \vdash n, n-2, n-4, \dots} (\# \text{UDTab}_n(\lambda))^2 = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

ということであり, Berere の insertion を用いても示することができる. ([Su, §8])

$P = Y^r$  のとき, 上で定義した線型変換  $D, U$  には次のような群論的な意味がある.  $Y^r$  の元を基底とする体  $K$  上の線型空間を  $K(Y^r)$  とし,  $\widehat{K}(Y^r)$  の部分空間と見なし,  $U, D$  を  $K(Y^r)$  に制限して考える.  $\Gamma$  を位数  $r$  の可換群とする.  $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$  上の  $K$  に値をもつ類関数全体のなす線型空間を  $CF_K(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n)$  と表わすと, 対応  $\lambda \mapsto \chi^\lambda$  によって,  $K(Y^r) \cong \bigoplus_{n \geq 0} CF_K(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n)$  となる. この同型で,  $K(Y^r)$  と  $\bigoplus_{n \geq 0} CF_K(\Gamma \wr \mathfrak{S}_n)$  を同一視すると,

$$U = \bigoplus_{n \geq 0} \text{Ind}_{\Gamma \wr \mathfrak{S}_n}^{\Gamma \wr \mathfrak{S}_{n+1}}$$

$$D = \bigoplus_{n \geq 0} \text{Res}_{\Gamma \wr \mathfrak{S}_n}^{\Gamma \wr \mathfrak{S}_{n+1}}$$

ここで,  $\text{Ind}_H^G$  は  $H$  から  $G$  への induce up を,  $\text{Res}_H^G$  は  $G$  から  $H$  への制限を表わす. (§2 の (5) を見よ. ) そして, 線型変換  $UD$  の固有ベクトルについて, 次が成り立つ.

命題 5.4.  $\Gamma$  を位数  $r$  の可換群とする. このとき,  $X \in \Gamma \wr \mathfrak{S}_n$  に対して,

$$\pi_X = \sum_{\lambda \in (Y^r)_n} \chi^\lambda(X) \lambda \in \mathbb{C}(Y^r)$$

は  $UD$  の固有ベクトルである.

より一般に, 任意の有限群  $\Gamma$  に対して, 次のことが成り立つ.  $\gamma \in \Gamma$  と  $l \in \mathbb{N}$  に対して, 線型変換  $U_\Gamma(\gamma, l), D_\Gamma(\gamma, l) : K(Y^r) \rightarrow K(Y^r)$  を次のように定義する.

$$U_\Gamma(\gamma, l)(\lambda^1, \dots, \lambda^k) = \sum_{i=1}^k \eta_i(\gamma) \sum_{\mu^i} (-1)^{\text{ht}(\mu^i/\lambda^i)} (\lambda^1, \dots, \mu^i, \dots, \lambda^k)$$

$$D_\Gamma(\gamma, l)(\lambda^1, \dots, \lambda^k) = \sum_{i=1}^k \eta_i(\gamma^{-1}) \sum_{\nu^i} (-1)^{\text{ht}(\lambda^i/\nu^i)} (\lambda^1, \dots, \nu^i, \dots, \lambda^k)$$

ここで,  $\mu^i$  (resp.  $\nu^i$ ) は skew diagram  $\mu^i/\lambda^i$  (resp.  $\lambda^i/\nu^i$  が  $\boxplus$  を含まず, かつ  $|\mu^i| - |\lambda^i| = l$  (resp.  $|\lambda^i| - |\nu^i| = l$ ) となる  $\mu^i > \lambda^i$  (resp.  $\nu^i < \mu^i$ ) 全体を動き,  $\text{ht}(\lambda/\mu)$  は skew diagram  $\lambda/\mu$  の占める行数-1 を表わす. このとき,

**命題 5.5.** ([O, Prop.5.4])  $\Gamma \wr \mathfrak{S}_n$  の指標表は線型変換  $U_\Gamma(\gamma, l)D_\Gamma(\gamma, l)$  ( $\gamma \in \Gamma, l \in \mathbb{N}$ ) の同時固有ベクトルを正規化して並べたものになっている.

### 参考文献

- [O] S. Okada, *Wreath products by the symmetric groups and product posets of Young's lattices*, to appear in J. Combin. Theory A.
- [St] R. P. Stanley, *Differential posets*, J. Amer. Math. Soc **1** (1988), 919–961.
- [Su] S. Sundaram, *On the combinatorics of representations of  $Sp(2n, \mathbb{C})$* , Ph.D. thesis, M.I.T..